



## CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

Profilul uman

Faza locală, 5 martie 2016

Clasa a XII-a

### 1. Tétel (7 pont)

Adott a  $G(x) = \begin{pmatrix} 3^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix}$  mátrix, ahol  $x \in \mathbb{R}$

- a) Igazoljátok, hogy  $G^n(x) = G(nx)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , bármely  $n \in \mathbb{N}^*$ ;  
b) Számítsátok ki a következő matrix determinánsát:  
 $G(0) + G(1) + G(2) + \dots + G(2016)$

### 2. Tétel (7 pont)

Adott a következő halmaz:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\} \subset M_2(\mathbb{Q}).$$

- a) Igazoljátok, hogy bármely  $A, B \in G$  mátrix esetén  $A \cdot B = B \cdot A$ ;  
b) Határozzátok meg az  $E \in G$  mátrixot, ha  $E \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = I_2$ .

### 3. Tétel (7 pont)

Adott a  $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$  determináns,  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

Igazoljátok, hogy  $\Delta = \frac{1}{2}(a+b+c)((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2)$ .

### 3. Tétel (7 pont)

Adott a következő egyenletrendszer: 
$$\begin{cases} x + ay + 2z = 1 \\ x + (2a-1)y + 3z = 1, a \in \mathbb{R} \\ x + ay + (a-3)z = 1 \end{cases}$$

és az  $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 1 & 2a-1 & 3 \\ 1 & a & a-3 \end{pmatrix}$  mátrix.

- a) Oljátok meg az egyenletet:  $\det(A) = 0$ ;  
b) Oldjátok meg az egyenletrendszert, ha  $a = 0$ .

**Notă:** Timp de lucru 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.